Clase 5: La Convolución.

Peter Hummelgens

10 de diciembre de 2006

1. Soporte de una distribución.

Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y sea $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$ un abierto. Denotaremos por $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ el subespacio lineal de las $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $sop(\varphi) \subset \mathcal{O}$ (así $\mathcal{D}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$). Decimos que

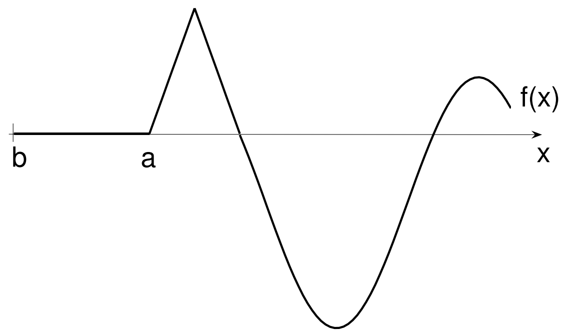
$$T = 0 \text{ en } \mathcal{O} \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \langle T, \varphi \rangle = 0 \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Luego, para $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ decimos que $T = S$ en $\mathcal{O} \overset{def.}{\Longleftrightarrow} T - S = 0$ en $\mathcal{O}$ (equivalentemente $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$). Definimos <u>el soporte</u> $sop(T)$ de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ como el complemento del abierto más grande donde $T = 0$. <u>Así $sop(T)$ es el conjunto cerrado más pequeño en $\mathbb{R}$ fuera del cual $T = 0$</u>. Con $sop(f)$ para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ entendemos $sop(T_f)$, donde T_f es la distribución regular definida por f.

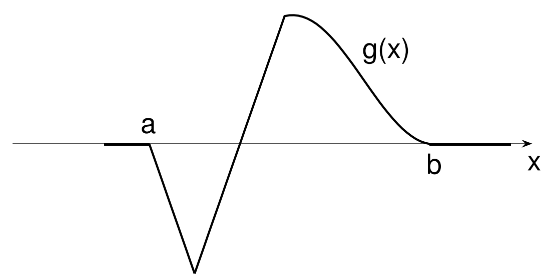
Tenemos $sop(\delta_a) = \{a\}$ ya que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} - \{a\}) \Longrightarrow \varphi(a) = 0 \Longrightarrow \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = 0$. Decimos entonces que <u>δ_a es una distribución concentrada en $x = a$</u>. Similarmente δ'_a, δ''_a, $\cdots$ son distribuciones concentradas en $x = a$.

2. Distribuciones Causales.

Una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se llama <u>distribución causal</u> si, y sólo si, para algún $a \in \mathbb{R}$ tenemos $T = 0$ en $(-\infty; a)$. Entonces $sop(T) \subseteq [a; \infty)$ (pero también $sop(T) \subseteq [b, \infty)$ para todo $b < a$). Así una $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ es causal si, y sólo si, para algún $a \in \mathbb{R}$ tenemos $f(x) = 0$ $c.s.$ en $(-\infty; a)$. <u>Una distribución de soporte compacto siempre es causal</u> porque es 0 fuera de algún intervalo acotado y cerrado.



f es causal con $sop(f) = [a;\infty) \subset [b;\infty)$.



g es de soporte compacto con $sop(g) = [a;b) \subset [a;\infty)$.

Las δ_a, δ'_a, δ''_a, $\cdots$ son de soporte compacto $\{a\}$, por lo tanto son distribuciones causales.

Denotaremos por $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las distribuciones causales. En particular $\delta_a, \delta'_a, \delta''_a, \cdots \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R})$. Las funciones $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ en las figuras anteriores pertenecen a $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

3. La convolución de funciones.

Sea $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales con $sop(f) \subseteq [a;\infty)$, $sop(g) \subseteq [b;\infty)$. Definimos el producto de convolución $f * g$ de f y g por

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi; \quad -\infty < x < \infty. \tag{1}$$

Para demostrar que la integral existe para todo $x \in \mathbb{R}$ vamos a probar que

$$(f * g)(x) = \int_{a}^{x-b} f(\xi)g(x-\xi)d\xi; \quad -\infty < x < \infty \tag{2}$$

(de modo que en (1) se trata en realidad de una integral sobre un intervalo acotado, la cual desde luego existe). En (1) tenemos $f(\xi) = 0$ $c.s.$ en $(-\infty; a)$ de modo que

$$(f * g)(x) = \int_{a}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi; \quad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

Pero en (3) tenemos $\xi > x - b \Longrightarrow x - \xi < b \Longrightarrow g(x-\xi) = 0$, de modo que el limite de integración superior ∞ puede ser reemplazado por $x - b$. Esto demuestra (2) y la existencia de $(f * g)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se puede verificar que $\underline{f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})}$. Veamos ahora que $\underline{f * g}$ es también causal. Tenemos $x < a + b \Longrightarrow x - b < a \Longrightarrow \xi < a$ y por lo tanto $f(\xi) = 0$ en la integral de (2)

$$\begin{gathered} \Longrightarrow \quad (f * g) = 0 \ \text{ para } x < a + b, \text{ es decir} \\ f * g \text{ es causal con } sop(f * g) \subseteq [a + b; \infty). \end{gathered} \tag{4}$$

Haciendo en (1) el cambio de variable $\xi \longrightarrow t = x - \xi$ ($x \in \mathbb{R}$ fijo) tenemos

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &\overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi = -\int_{\infty}^{-\infty} f(x-t)g(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)dt = (g * f)(x), \end{aligned}$$

es decir,

$$f * g = g * f \quad (* \text{ es conmutativo}). \tag{5}$$

Además es fácil comprobar que para $f, g, k \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ <u>causales</u> tenemos

$$(f * g) * k = f * (g * k) \quad (\text{ley asociativa}). \tag{6}$$

y podemos escribir $f * g * k$ sin poner paréntesis, y por (5)

$$f * g * k = f * (k * g) = k * f * g = \cdots, \ etc.$$

Además tenemos para $f, g, k \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f * (g + k) &= f * g + f * k, \\ f * (\lambda g) &= \lambda f * g \end{aligned} \tag{7}$$

es decir, $f* : L^1_{loc}(\mathbb{R})_+ \longrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R})_+$ $(g \longrightarrow f * g)$ es un operador lineal. El operador $f*$ se llama un operador de convolución.

Una manera para producir funciones causales es la multiplicación con una función de Heaviside. Así, si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = h_a(x)u(x)$ es causal con $sop(f) \subseteq [a; \infty)$. Sea también $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ y $g(x) = h_b(x)v(x)$ (podemos también escribir $f(x) = h(x-a)u(x)$, $g(x) = h(x-b)v(x)$ donde $h(t)$ es la función de heaviside centrada en $t = 0$). Entonces es fácil obtener de (2) la fórmula

$$\begin{gathered} (f * g)(x) = h(x-a-b) \int_a^{x-b} u(\xi)v(x-\xi)d\xi; \quad -\infty < x < \infty \\ \textit{cuando} \;\; f(x) = h(x-a)u(x), \;\; g(x) = h(x-b)v(x). \end{gathered} \tag{8}$$

El factor $h(x-a-b)$ frente de la integral es 0 para $x < a+b$, de manera que la formula muestra de manera explícita que $sop(f * g) \subseteq [a+b; \infty)$ (ver (4))

Ejemplo 1. *Sea $\phi(x) = h(x) * h(x)\cos(2x)$; $-\infty < x < \infty$. Se pide hallar $\phi(x)$ en forma explícita. En (8) Tomamos $f(x) = h(x)1(x)$ ($1(x) := 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$), $g(x) = h(x)\cos(2x)$. Entonces (8) da*

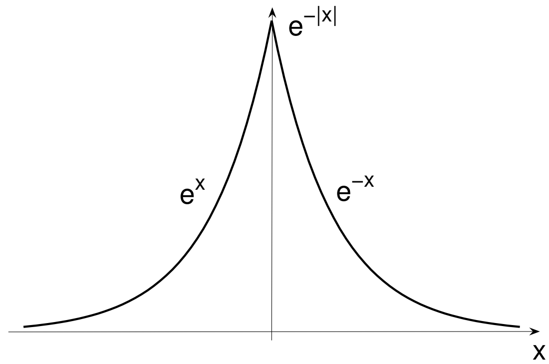
$$\begin{aligned} \phi(x) &= h(x)\int_0^x 1(\xi)\cos[2(x-\xi)]d\xi = h(x)\int_0^x \cos[2(x-\xi)]d\xi \\ &= \frac{1}{2}h(x)\,\mathrm{sen}(2x) \;\; \textit{luego de un computo elemental.} \end{aligned}$$

Verifique que $h(x)\cos(2x) * h(x)$ da lo mismo.

Hemos tomado un ejemplo bastante sencillo porque la evaluación de un producto de convolución mediante integración puede ser muy tedioso. Pero sobre todo porque vamos a conocer más adelante métodos más eficientes que frecuentemente permiten evitar el computo de integrales, usando derivadas generalizadas y las reglas operacionales de la convolución, y también la transformada de Laplace. Ejemplos donde se aplica la integración se consigue en la guía de ejercicios resueltos del Profesor Hummelgens.

El producto de convolución (1) también existe en casos donde f, g no son causales. Por ejemplo $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ existe $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Así tenemos (ver la guía)

$$e^{-|x|} * e^{-|x|} = e^{-|x|}(1 + |x|); \quad -\infty < x < \infty.$$



Otros casos donde existe el producto de convolución mencionaremos más adelante.

4. La convolución de distribuciones.

Consideremos nuevamente el producto $f * g$ con $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales. Vimos que $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, de modo que $f * g$ define una distribución regular. Tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\varphi(x)dx \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi \right) \varphi(x)dx \\
&\overset{Fubini}{=} \int\int_{\mathbb{R}^2} f(\xi)g(x-\xi)\varphi(x)dxd\xi = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)\varphi(u+v)dudv,
\end{aligned}$$

luego del cambio de variables $u = \xi$, $v = x - \xi$ (con x fijo). La formula obtenida,

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)\varphi(u+v)dudv, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

hace ver como $f * g$ actúa como distribución. La integral doble puede escribirse (mediante Fubini) como corchetes compuestos (ó iteradas):

$$\begin{aligned}
\langle f * g, \varphi \rangle &= \langle f(u), \langle g(v), \varphi(u+v) \rangle \rangle \\
&= \langle g(v), \langle f(u), \varphi(u+v) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).
\end{aligned} \tag{9}$$

Podemos ahora definir $S * T$ para $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en analogía con (9) por

$$\begin{aligned}
\langle S * T, \varphi \rangle &:= \langle S(u), \langle T(v), \varphi(u+v) \rangle \rangle \\
&= \langle T(v), \langle S(u), \varphi(u+v) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),
\end{aligned} \tag{10}$$

si es que los corchetes compuestos existen (lo que no siempre es el caso). En este caso tenemos

$$\begin{aligned} S * T &= T * S \\ S * (T + U) &= S * T + S * U \ \ \text{(si existe } S * T,\ S * U). \end{aligned} \tag{11}$$

Mencionamos algunos casos donde la convolución existe:

(a) $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales $\Longrightarrow$ existe $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y es causal.

(b) $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ existe $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

(c) $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, una de ellas en $L^1(\mathbb{R})$ y la otra acotada $\Longrightarrow$ existe $f * g \in C(\mathbb{R})$ y es acotada.

(d) $S, T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ existe $S * T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

(e) $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y una de ellas es de soporte compacto $\Longrightarrow$ existe $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y es de soporte compacto cuando S, T ambas son de soporte compacto.

5. Reglas operacionales.

Según (e) existe $\delta_a * T$ para todo $a \in \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Tenemos

$$\begin{aligned} \langle \delta * T, \varphi \rangle &\overset{(10)}{=} \langle T(v), \langle \delta(u), \varphi(u + v) \rangle \rangle = \langle T(v), \varphi(0 + v) \rangle \\ &= \langle T(v), \varphi(v) \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \ \ \text{para } \underline{\text{todo}}\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \\ &\Longrightarrow \ \delta * T = T, \ \ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \end{aligned} \tag{12}$$

en otras palabras: δ es el elemento neutro del producto de convolución.

Para describir el efecto de la convolución con δ_a $(a \neq 0)$, introducimos el operador de traslación $\tau_a : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $(T \longrightarrow \tau_a T)$ cuya definición explicamos a continuación. Primero, para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definimos $\tau_a f$ por traslación de la gráfica de f, es decir,

$$(\tau_a f)(x) := f(x - a), \ \ -\infty < x < \infty. \tag{13}$$

Tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \tau_a f, \varphi \rangle &\overset{(13)}{=} \langle f(x - a), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t + a) dt = \langle f(x), \varphi(x + a) \rangle, \end{aligned}$$

luego es natural definir

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle := \langle T(x), \varphi(x+a) \rangle; \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

También, en vista de (13) es natural escribir $T(x-a)$ en lugar de $(\tau_a T)(x)$, y en particular

$$\delta(x-a) := (\tau_a \delta)(x) \quad \Longrightarrow \quad \tau_a \delta = \delta_a, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

y así surge la <u>notación</u> $\delta(x-a)$ en lugar de $\delta_a(x)$ (la cual utilizaremos con frecuencia). Tenemos ahora

$$\begin{aligned} \langle \delta_a * T, \varphi \rangle &\overset{(10)}{=} \langle T(v), \langle \delta_a(u), \varphi(u+v) \rangle \rangle = \langle T(v), \varphi(v+a) \rangle \\ &\overset{(14)}{=} \langle \tau_a T, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

de modo que

$$\delta_a * T = T * \delta_a = \tau_a T, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

es decir, $\delta_a * = \tau_a$ <u>es un operador de traslación y la traslación es un operador de convolución</u>. Para $a = 0$ (16) da (12) de nuevo. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tenemos de (13), (16) que

$$\delta_a(x) * f(x) = f(x-a), \quad a \in \mathbb{R}.$$